Satz 3.5. Sei G eine abzählbare Gruppe. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) G enthält eine Følner-Folge.

(2) Es existiert ein endlich-additives links-invariantes Maß μ auf G,
d.h. es gibt eine Funktion $\mu : \mathcal{P}(G) \to [0,1]$, s.d. Folgendes gilt:

(i) $\mu(G) = 1$

(ii) $\forall A, B \subseteq G: \ \mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$

(iii) $\forall A \subseteq G \ \forall g \in G: \ \mu(gA) = \mu(A)$

Beweis. Wir zeigen (1) $\Rightarrow$ (2). Für jede endliche Teilmenge $A \subseteq G$ und jedes $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$M_{A,\varepsilon} := \{\mu \in [0,1]^{\mathcal{P}(G)} \mid \forall B \subseteq G \ \forall A \in A: \ |\mu(B) - \mu(aB)| \leq \varepsilon, \ \mu \in \mathrm{Prob}(G)\},$$

wobei

$$\mathrm{Prob(G)} = \{\mu \in [0,1]^{\mathcal{P}(\mathrm{G})} \mid \mu \text{ erfüllt (i) und (ii)}\}.$$

Idee: Wir beweisen, dass μ im Schnitt aller $M_{A,\varepsilon}$ mit endlichem $A \subseteq G$ und $\varepsilon > 0$ liegt. Dann würde $|\mu(B) - \mu(aB)| = 0$ für alle $a \in G$ gelten, somit wäre μ links-invariant.

Wir zeigen zunächst die Abgeschlossenheit von $M_{A,\varepsilon}$. Es reicht, zu zeigen, dass das Komplement

$$M_{A,\varepsilon}^c = \{\mu \in [0,1]^{\mathcal{P}(G)} \mid \exists B \subseteq G \ \exists a \in A: \ |\mu(B) - \mu(aB)| > \varepsilon \text{ oder } \mu \notin \mathrm{Prob}(G)\}$$

von $M_{A,\varepsilon}$ in $[0,1]^{\mathcal{P}(G)}$ offen ist. Wir können dieses Komplement schreiben als $M_{A,\varepsilon}^c = P \cup Q$ mit

$$P := \{\mu \in [0,1]^{\mathcal{P}(G)} \mid \exists B \subseteq G \ \exists a \in A: \ |\mu(B) - \mu(aB)| > \varepsilon\}$$

und

$$Q := \{\mu \in [0,1]^{\mathcal{P}(G)} \mid \mu \notin \mathrm{Prob}(G)\}$$

P ist offen, da $\{(x,y) \in [0,1]^2 \mid |x - y| > \varepsilon\}$ offen in $[0,1]^2$ ist.
Q lässt sich schreiben als $Q_1 \cup Q_2$ mit
$Q_1 := \{\mu \in Q \mid \mu(G) \neq 1\}$ und $Q_2 := \{\mu \in Q \mid \exists A, B \subseteq G: \ \mu(A \sqcup B) \neq \mu(A) + \mu(B)\}$.
Q_1 ist offen, da $[0,1)$ offen in $[0,1]$. Q_2 ist offen, da $\{(x,y,z) \in [0,1]^3 \mid x + y \neq z\}$ offen in $[0,1]^3$ ist.
Somit ist $M_{A,\varepsilon}^c$ als Vereinigung offener Mengen offen und folglich $M_{A,\varepsilon}$ abgeschlossen.

Nun zeigen wir, dass $M_{A,\varepsilon}$ nicht leer ist. Wegen $|A| < \infty$ und $\varepsilon > 0$ existiert $F \subseteq G$ mit $\frac{F \triangle a^{-1}F}{|F|} < \varepsilon$. Wir definieren μ durch $\mu(B) := \frac{|B \cap F|}{|F|}$ für $B \subseteq G$. Es gilt

$$\begin{aligned} |\mu(B) - \mu(aB)| &= \left| \frac{|B \cap F|}{|F|} - \frac{|aB \cap F|}{|F|} \right| = \left| \frac{|B \cap F| - |aB \cap F|}{|F|} \right| \\ &= \left| \frac{|B \cap F| - |B \cap a^{-1}F|}{|F|} \right| = \left| \frac{|C| - |D|}{|F|} \right| \leq \frac{|C| + |D|}{|F|} \end{aligned}$$

mit $C := B \cap F$ und $D := B \cap a^{-1}F$. Wegen $C \subseteq F \backslash a^{-1}F$ und $D \subseteq a^{-1}F \backslash F$ gilt

$$\frac{|C| + |D|}{|F|} \leq \frac{|F \backslash a^{-1}F| + |a^{-1}F \backslash F|}{|F|} = \frac{|F \triangle a^{-1}F|}{|F|} = \frac{F \triangle a^{-1}F}{|F|} < \varepsilon.$$

Also ist μ links-invariant und es gilt $\mu \in M_{A,\varepsilon}$.